

Cordes, arbres et permutations

Serge Dulucq et Jean-Guy Penaud

LaBRI, U.R.A. CNRS no-1304, France

Received 31 January 1990

Revised 23 May 1991

Résumé

Dulucq, S., J.-G. Penaud, Cordes, arbres et permutations, *Discrete Mathematics* 117 (1993) 89–105.

Les configurations de cordes sur un cercle sont en relation avec les involutions, les arbres binaires, les arbres ternaires et les décompositions de permutations circulaires en produit de transpositions. Ce dernier cas conduit à une nouvelle formule de récurrence pour les nombres de Catalan.

Abstract

Dulucq, S., J.-G. Penaud, Cordes, arbres et permutations, *Discrete Mathematics* 117 (1993) 89–105.

The chord configurations on the circle are in relation with involutions, binary trees, ternary trees and with the decomposition of circle permutations written as product of transpositions. This last case leads to a new recurrence formula for the Catalan numbers.

0. Introduction

Plaçons n points sur un cercle et considérons les cordes internes au cercle ayant ces points comme extrémités. L'énumération des configurations de cordes que l'on peut définir en imposant divers types de contraintes est un problème classique de combinatoire. Citons les travaux de Errera [9], Touchard [22–24], et plus récemment, Riordan [19] et Read [18]. Notons que certains auteurs, comme par exemple Touchard [23], considèrent un cercle de rayon infini et parlent d'un système d'arches joignant n points d'une droite.

L'objet de cet article est d'étudier les relations entre les configurations de cordes et les arbres. De cette étude nous déduisons des preuves bijectives de résultats dont certains sont connus, et d'autres nouveaux.

La Section I est un rappel des résultats classiques, lorsque chaque point du cercle est extrémité d'au plus une corde. En particulier les *configurations de cordes 2 à 2 disjointes* sont comptées par les *nombres de Catalan*. Il est usuel d'associer à un ensemble

Correspondence to: Serge Dulucq, Jean-Guy Penaud, LaBRI, Université de Bordeaux I, 33405 Talence, France.

de cordes leur graphe de croisement, dit *graphe de cordes*, et Touchard [24] avait posé la question de dénombrer les configurations de cordes dont le graphe de croisement est connexe. Ce problème a été résolu par Stein [21] et Nijenhuis et Wilf [17].

Dans la Section 2 nous ajoutons la contrainte que le graphe de cordes soit un arbre et nous montrons que les configurations de cordes sont alors en bijection avec les arbres ternaires.

La Section 3 commence par un exposé des résultats de Dénes [4] et de Eden et Schützenberger [8] sur la décomposition d'une permutation circulaire en produit de transpositions. Récemment Eidswick [7] a posé et résolu analytiquement le problème de déterminer de combien de façons l'on peut écrire une permutation circulaire donnée de longueur n , comme produit de $n-1$ transpositions, en confondant les produits qui ne diffèrent que par l'ordre des facteurs. En utilisant une construction exposée par Berge [2] qui associe au produit de transpositions un système de cordes sur un cercle (sans la contrainte d'avoir des extrémités distinctes), nous montrons que ces produits sont ici encore en bijection avec les arbres ternaires.

Enfin la formule de dénombrement dans l'article de Eidswick précédemment cité nous conduit à une nouvelle formule de récurrence pour les nombres de Catalan et les nombres d'arbres p -aires en général, dont nous donnons une preuve bijective.

1. Rappel des résultats classiques

1.1. Involutions

L'ensemble des configurations de cordes dont les extrémités sont distinctes et prises parmi n points $1, 2, \dots, n$ placés dans cet ordre sur un cercle (Fig. 1) est trivialement en bijection avec les *involutions* sur l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$, ensemble que nous notons $[n]$.

Le nombre I_n de telles configurations est alors (cf. [14])

$$I_n = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{n!}{k! (n-2k)! 2^k}. \quad (1)$$

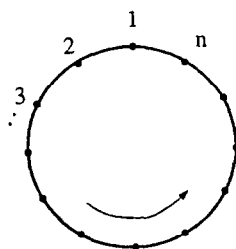


Fig. 1.

D'autre part, les nombres I_n vérifient la récurrence,

$$\begin{aligned} I_1 &= 1, & I_2 &= 2, \\ I_n &= I_{n-1} + (n-1) I_{n-2} \quad (n > 2). \end{aligned} \quad (2)$$

Si l'on interdit les points isolés sur le cercle, on obtient alors les *involutions sans point fixe*, dénombrées par les factorielles impaires ($n \geq 1$),

$$J_{2n} = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1). \quad (3)$$

1.2. Cordes deux à deux disjointes (c'est-à-dire sans point de croisement)

Si l'on interdit les points isolés, le problème de dénombrer de telles configurations définies par $2n$ points fut d'après Riordan [19], posé et résolu par Errera [9].

Il fait intervenir le *nombre de Catalan* c_n , donné par

$$c_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}. \quad (4)$$

Ce nombre fameux qui a plus de 40 interprétations combinatoires recensées par Gould [11, p. IV], dénombre en particulier les arbres binaires à n sommets, ainsi que les *arbres planaires* c'est-à-dire munis d'une racine et dessinés dans le plan (cf. [13, p. 305]), ayant n arêtes.

La Fig. 2 rappelle la correspondance entre ces arbres et les systèmes de cordes ne se croisant pas. Il suffit de placer un sommet dans chaque région délimitée par les cordes dans le cercle, et de joindre par une arête tout couple de sommets dans deux régions adjacentes. (Notons que les cordes ont été dessinées par des arcs de courbe pour la lisibilité de la figure).

Si l'on autorise d'éventuels points isolés, les configurations à n points sur le cercle sont comptées par les *nombre de Motzkin* [5, 15],

$$m_n = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k} c_k. \quad (5)$$

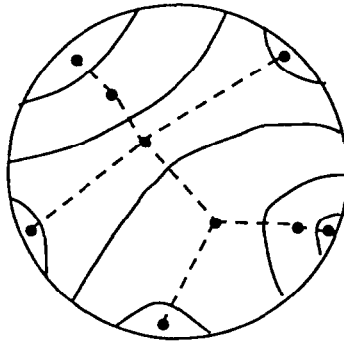


Fig. 2.

2.3. Graphe de cordes

A toute involution sans point fixe α , on peut associer, en plus d'un ensemble de cordes $\mathcal{C}(\alpha)$, leur graphe de croisement, notion dont le lecteur trouvera dans [10] une bonne introduction. Rappelons la définition,

Définition 1.1. On appelle *graphe de cordes* d'une involution sans point fixe α opérant sur $[2n]$ le graphe $\mathcal{G}(\alpha)$ ainsi construit:

- les sommets sont les n couples d'entiers $(i, \alpha(i))$;
- deux sommets (i, j) et (k, l) sont reliés par une arête si et seulement si $i < k < j < l$ ou $k < i < l < j$.

La Fig. 3 montre l'ensemble des cordes $\mathcal{C}(\alpha)$ et le graphe de cordes $\mathcal{G}(\alpha)$ associés à l'involution $\alpha = (1, 4)(2, 5)(3, 6)(7, 12)(8, 10)(9, 11)$. Dans cet exemple, le graphe \mathcal{G} n'est pas connexe.

Touchard [24] avait posé la question de déterminer le nombre θ_n d'*involutions connexes* sur $[2n]$, c'est-à-dire dont le graphe de cordes est connexe; les premières valeurs sont,

$$(\theta_n)_{n \geq 1} = 1, 1, 4, 27, 248, 2830, 38\,232, \dots$$

Stein [21] puis Nijenhuis et Wilf [17] ont montré que θ_n est donné par la formule de récurrence,

$$\begin{aligned} \theta_1 &= 1, \\ \theta_n &= (n-1) \sum_{i=1}^{n-1} \theta_i \theta_{n-i}. \end{aligned} \tag{6}$$

Dulucq [6], d'autre part, a montré que θ_n est lié à la probabilité d'obtention π d'un arbre A appartenant à la famille des arbres planaires à n sommets \mathcal{T}_n . Cet arbre apparait à l'issue d'un nombre infini de transformations dans un algorithme d'exclusion mutuelle dans un réseau distribué. Cet algorithme a été proposé par

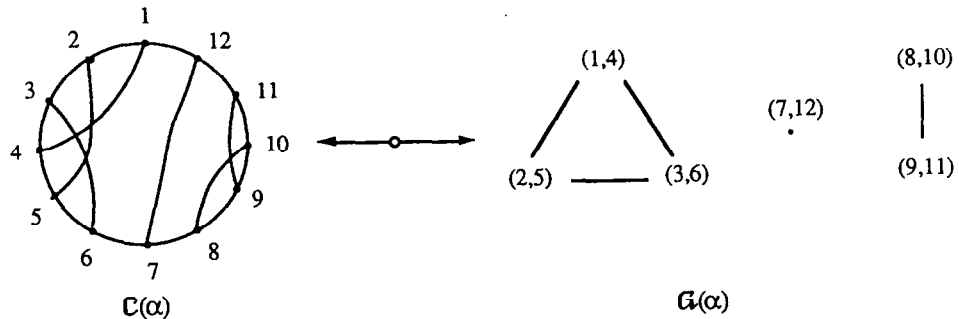


Fig. 3.

Tréhel et Naïmi [25], et sa complexité moyenne a été étudiée par Arnold, Delest et Dulucq [1]. Ainsi on a,

$$\theta_n = \sum_{A \in \mathcal{F}_n} \frac{1}{\pi(A)}. \quad (7)$$

De plus, si l'on considère les polynômes définis par les relations

$$\begin{aligned} \Theta_1(x) &= 1, \\ \Theta_n(x) &= \sum_{k=1}^{2n-3} \theta_{n,k} x^k, \quad n \geq 2, \end{aligned} \quad (8)$$

où $\theta_{n,k}$ est le nombre d'involutions connexes de $[2n]$ telles que l'image de 1 soit $k+2$; ces auteurs ont montré qu'ils vérifient les relations suivantes:

$$\begin{aligned} \Theta_1(x) &= 1, \\ \Theta_n(x) &= \sum_{i=1}^{n-1} x \frac{1-x^{2i-1}}{1-x} \Theta_i(1) \Theta_{n-i}(x), \quad n \geq 2. \end{aligned} \quad (9)$$

2. Involution-arbre

On appelle ainsi toute involution sans point fixe dont le graphe de cordes est un arbre, comme celui de la Fig. 4; et l'on peut poser la question de dénombrer ces involutions.

Soit a_n le nombre d'involutions-arbres sur $[2n]$, dont le graphe de cordes possède donc n sommets et $n-1$ arêtes.

On a immédiatement la proposition suivante.

Proposition 2.1. $\mathcal{G}(\alpha)$ est un arbre si et seulement si, dans $\mathcal{C}(\alpha)$, toute région du cercle délimitée par les cordes est incidente à un et un seul arc de cercle.

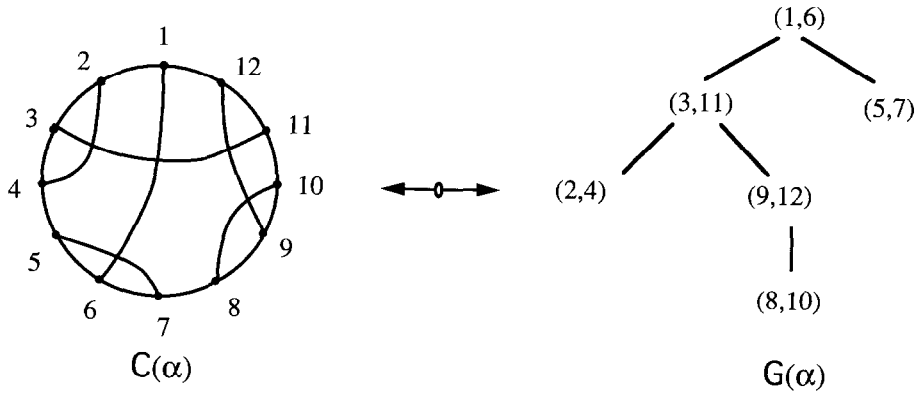


Fig. 4.

Théorème 2.2. (1) *Le nombre d'involutions-arbres sur $[2n+2]$ est égal au nombre d'arbres ternaires à n sommets internes, soit,*

$$a_{n+1} = \frac{1}{2n+1} \binom{3n}{n}. \quad (10)$$

(2) *Le nombre d'involutions-arbres sur $[2n+2]$, et dont la longueur du chemin de $(1, i)$ à $(2, j)$ dans le graphe de cordes associé est $k-2$, est égal au nombre d'arbres ternaires à n sommets internes et dont la branche gauche est de longueur k , soit,*

$$a_{n+1, k-2} = \frac{2k}{3n-k} \binom{3n-k}{2n}, \quad 1 \leq k \leq n. \quad (11)$$

Preuve. Les nombres a_n et $a_{n,k}$ dénombrent classiquement les arbres ternaires (voir [12, 15]). Il suffit alors d'établir une bijection entre les configurations de $n+1$ cordes sur le cercle dont le graphe de croisement est un arbre (donc possède n arêtes), et les arbres ternaires à n sommets internes.

Le lecteur trouvera dans [6] une preuve formelle de cette bijection. Donnons-en ici une preuve plus visuelle, illustrée par la Fig. 5. Soit en effet une involution sans point fixe α sur $[2n]$, telle que le graphe de cordes associé $\mathcal{G}(\alpha)$ soit un arbre. Considérons une représentation planaire du cercle et de l'ensemble des n cordes $\mathcal{C}(\alpha)$, telle, ce qui est toujours possible, que par un point de croisement ne passe que deux cordes. La figure composée de l'ensemble des $2n$ points du cercle augmenté des points de croisement, et des parties de corde qui les joignent, est clairement la représentation d'un graphe planaire. Soit $\mathcal{T}(\alpha)$ ce graphe planaire.

$\mathcal{T}(\alpha)$ est connexe, et, comme $\mathcal{G}(\alpha)$ est un arbre, $\mathcal{T}(\alpha)$ est sans cycle. C'est donc un arbre planaire. Prenons le point 1 comme racine. $\mathcal{T}(\alpha)$ devient alors un *arbre ternaire planté*. Il a $n-1$ sommets internes, $2n-1$ feuilles sur le cercle, plus la racine, qui n'a qu'un fils.

Réciproquement, considérons un arbre ternaire \mathcal{T} planté dessiné dans le plan. La courbe qui relie la racine et les feuilles dans l'ordre préfixe est homéomorphe à un

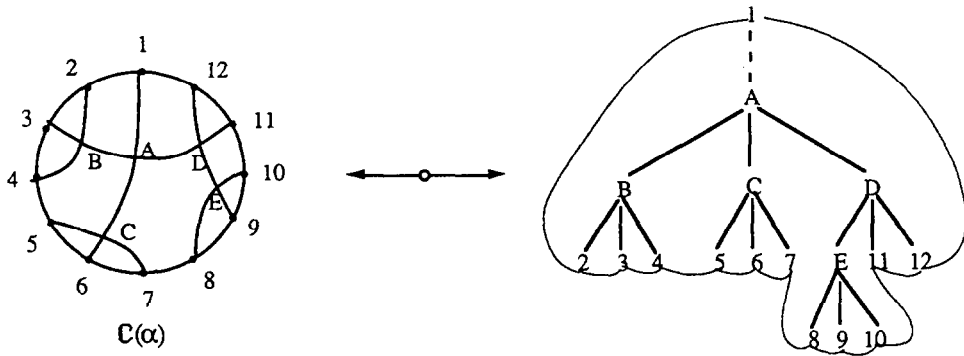


Fig. 5.

cercle. Chaque sommet interne de \mathcal{T} est de degré 4 dans le graphe non orienté sous-jacent et constitue le centre d'un 'carrefour'. Les chaînes constituées d'arcs de \mathcal{T} qui ont pour origines les feuilles, et telles qu'en tout sommet interne, l'arc suivant dans la chaîne soit l'arc opposé du carrefour, relient entre elles les feuilles deux à deux: elles définissent les cordes dont les points de croisement sont précisément les sommets internes.

Le point 2 se déduit de la bijection ci-dessus et des résultats de [12, 15]. \square

3. Décomposition d'une permutation circulaire en produit de transpositions

Ce problème, dont le lecteur trouvera un bel exposé dans les *Principes de Combinatoire* [2, p. 117], est lié à certaines configurations de cordes sur un cercle.

A tout ensemble de transpositions $T = \{t_1, t_2, \dots, t_k\}$ sur un ensemble X , on peut associer un graphe (X, T) dont X constitue l'ensemble des sommets, et dont les arêtes sont les paires de points de X qui s'échangent par les transpositions de T . On a alors la caractérisation suivante due à Dénes.

Théorème 3.1 (Dénes [4]). *Soit $T = \{t_1, t_2, \dots, t_{n-1}\}$ un ensemble de $n-1$ transpositions sur $[n]$. Le produit $f = t_1 t_2 \cdots t_{n-1}$ est une permutation circulaire de degré n si et seulement si le graphe $([n], T)$ est un arbre.*

On en déduit le corollaire suivant.

Corollaire 3.2 (Dénes [4]). *Le nombre $A(f)$ de façons d'écrire une permutation circulaire f de degré n comme produit de $n-1$ transpositions est n^{n-2} .*

Cette propriété, conséquence directe de la formule de Cayley, s'obtient en égalant le cardinal de l'ensemble des arbres dont les sommets sont les entiers de 1 à n et dont les arêtes sont étiquetées de 1 à $n-1$ avec l'ensemble de tous les produits de $n-1$ transpositions de $[n]$ qui sont égaux à des permutations circulaires.

Ce résultat suggère plusieurs questions.

La première, posée par Dénes, est de trouver une bijection directe entre les arbres étiquetés à n sommets, et les produits de $n-1$ transpositions donnant une permutation circulaire donnée. Moszkowski [16] vient récemment d'y répondre.

D'autre part, les $(n-1)!$ produits possibles formés avec les arêtes d'un arbre $([n], T)$ fixé ne donnent pas nécessairement toutes les permutations circulaires de $[n]$. A quelle condition deux produits de transpositions formés par deux permutations distinctes des arêtes d'un même arbre donnent-elles la même permutation circulaire? Cette question fut posée et résolue par Eden et Schützenberger [7]. En voici un bref rappel.

Définition 3.3. A tout produit f de transpositions d'un ensemble T opérant sur $[n]$, on peut associer le mot \bar{f} en considérant T comme un alphabet. On définit de plus, pour

tout k dans $[n]$, $\pi_k(\bar{f})$ comme le sous-mot de \bar{f} formé des transpositions qui affectent k , et $\pi_k(f)$ la permutation égale au produit de transposition associé.

Exemple. La Fig. 8 montre une contruction attachée à la permutation f donnée sous forme de produit de transpositions, $f=(3, 4)(2, 4)(1, 5)(1, 4)(8, 7)(8, 6)(8, 5)$ et en posant $a=(1, 4)$, $b=(2, 4)$, $c=(3, 4)$, $d=(1, 5)$, $e=(5, 8)$, $f=(6, 8)$ et $g=(7, 8)$, on obtient le mot $\bar{f}=c.b.d.a.g.f.e$; $\pi_4(f)=(3, 4)(2, 4)(1, 4)$ et $\pi_4(\bar{f})=cba$.

On établit alors le lemme suivant.

Lemme 3.4. *Si g est une permutation circulaire de $[n]$ et si en k ($1 \leq k \leq n$) on a,*

$$\pi_k(g)=(i_1, k)(i_2, k) \dots (i_p, k), \quad 1 \leq p \leq n-1,$$

alors le cycle de g s'écrit,

$$g=(k, \dots, i_p, \dots, i_{p-1}, \dots, \dots, i_2, \dots, i_1, \dots).$$

D'où le théorème suivant.

Théorème 3.5 (Eden and Schützenberger [7]). *Deux mots $\bar{f}=t_1 t_2 \dots t_{n-1}$ et $\bar{g}=t'_1 t'_2 \dots t'_{n-1}$ formés avec les $n-1$ arêtes d'un arbre $([n], T)$ donnent des permutations circulaires f et g égales si et seulement si*

$$\pi_k(\bar{f})=\pi_k(\bar{g}), \quad \text{pour tout } k \text{ tel que } 1 \leq k \leq n.$$

Ce résultat à deux conséquences: la première (Corollaire 3.6) est le calcul du nombre de permutations circulaires que l'on peut obtenir avec les arêtes d'un arbre donné; la seconde est une caractérisation des arbres permettant de construire une permutation circulaire donnée (Lemme 3.7). Ce dernier résultat, suggéré dans [2, p. 122], utilise une construction donnée par Berge dans cet ouvrage.

Corollaire 3.6 (Eden and Schützenberger [7]). *Si $([n], T)$ est un arbre avec des degrés d_i ($1 \leq i \leq n$), le nombre de permutations circulaires distinctes de degré n qu'on obtient comme produit de ses $n-1$ arêtes est*

$$\prod_{i=1}^n (d_i!).$$

Appelons Π_T l'ensemble des $(n-1)!$ produits de transpositions associés à l'arbre $([n], T)$. On peut alors énoncer le lemme suivant où intervient la notion d'*arbre non-croisé*, c'est à dire d'arbre dont les arêtes constituent un ensemble de cordes non croisées sur un cercle, formant ainsi un dessin planaire.

Lemme 3.7. Π_T *contient un produit égal à la permutation circulaire $\zeta=(1, 2, \dots, n)$ si et seulement si l'arbre $([n], T)$ ne contient pas de couple d'arêtes disjointes (i, j) et (k, l) telles que $i < k < j < l$.*

Preuve. (a) Supposons $([n], T)$ non croisé. La preuve de la condition suffisante se fait en deux temps:

(i) Mise en évidence d'un ordre total sur les arêtes dont la restriction aux arêtes issues du sommet k est égale à l'ordre partiel (noté $<_k$)

$$(k, i_1) <_k (k, i_2) <_k \cdots <_k (k, i_p)$$

les sommets k, i_1, i_2, \dots, i_p , apparaissant dans cet ordre dans le cycle de ζ^{-1} .

(ii) Preuve par induction que tout ordre total ainsi défini détermine un produit de transpositions égal à ζ .

Pour le premier point, associons à l'arbre planaire le graphe $G_T = (T, A)$ ayant pour sommets les arêtes de T et pour ensemble d'arcs A les couples $((k, i), (k, j))$ d'arêtes incidentes en un même sommet k de $[n]$, et qui sont consécutives dans l'ordre $<_k$. La Fig. 6 suivante montre le sous graphe de G_T induit par les arêtes a, b, c, d et f . Comme $([n], T)$ est un arbre planaire, il est clair que G_T est connexe sans cycle, donc a fortiori sans circuit (*dag* dans la terminologie anglo-saxonne). Il possède donc au moins un tri topologique, c'est-à-dire un ordre sur les sommets $<_T$ compatible avec les arcs de G_T .

$$(e, f) \in A \Leftrightarrow e <_T f,$$

ce qui implique immédiatement que pour cet ordre

$$e <_k f \Leftrightarrow e <_T f.$$

Pour le deuxième point, établissons d'abord que la planarité de $([n], T)$ implique l'existence d'une arête pendante $(i, i+1)$. Il suffit de considérer une arête pendante (i, j) telle que $|j-i|$ soit minimal pour vérifier que nécessairement $j=i-1$ (ou $j=i+1$). Comme il y a toujours au moins deux arêtes pendantes si $n > 2$, il est toujours possible de supposer le sommet pendant différent de 1.

Soit j le sommet pendant (c.à.d. de degré 1), et supposons $j=i-1$. (Le raisonnement est symétrique si $j=i+1$). D'après ce qui précède, il existe un ordre sur T compatible avec l'ordre $<_i$ et soit g la permutation circulaire déterminée par le produit de transpositions associé à cet ordre. L'arête $(i, i-1)$ est minimale dans l'ordre partiel $<_i$,

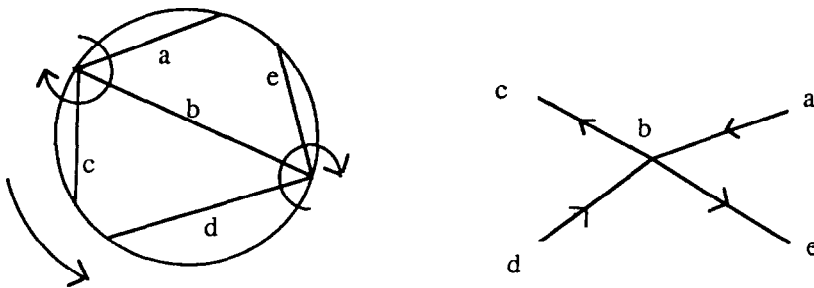


Fig. 6.

donc en tête dans le produit donnant g parmi les transpositions contenant i , et comme $i-1$ ne figure dans aucune autre transposition du produit, la transposition $(i, i-1)$ commute avec toutes les précédentes. Soit g_1 la permutation circulaire égale au produit ainsi obtenu. On a $g = g_1$, et d'autre part $g_1 = (i, i-1) g'$ où g' est la permutation circulaire opérant sur $[n] - \{i-1\}$, égale au produit des autres transpositions.

Posons $T' = T \setminus \{(i, i-1)\}$ et $\zeta' = (1, 2, \dots, i-2, i, \dots, n)$. On peut alors raisonner par induction malgré un léger abus de notation, et l'on a

$$g' = \zeta'.$$

Or $\zeta = (i, i-1) \cdot \zeta'$, d'où $g = \zeta$.

(b) Condition nécessaire.

Cette preuve est facilitée par quelques outils techniques:

(i) la notion de projection cyclique: étant donnée une permutation σ sur un ensemble fini E et un sous ensemble F de E , appelons *projection cyclique* (en abrégé *c-projection*) de σ sur F la permutation σ' notée $\sigma|_F$ définie sur F de la façon suivante,

$$\forall t \in F, \sigma'(t) = \sigma^k(t), \text{ où } k \text{ est le plus petit entier positif tel que } \sigma^k(t) \in F,$$

c'est-à-dire telle que les cycles de σ' s'obtiennent à partir de ceux de σ en effaçant les éléments qui ne sont pas dans F .

(ii) le lemme technique 3.8 et son Corollaire 3.9.

Supposons en effet qu'il existe des arbres croisés donnant la permutation circulaire $\zeta = (1, 2, \dots, n)$, et choisissons un tel arbre $([n], T)$ qui soit *minimal*, c'est-à-dire n'ayant pas de sous-arbre strict ayant cette propriété à une renumérotation des sommets près. Nécessairement $n \geq 4$. D'après le Corollaire 3.9, cet arbre est constitué d'une paire d'arêtes croisées pendantes, (i, j) et (k, l) , et de p arêtes ($p \geq 1$), qui forment une chaîne non croisée les reliant. Supposons $i < k < j < l$, i et l les deux sommets pendants, les sommets j et k reliés par la chaîne $(j, s_1), (s_1, s_2), \dots, (s_{p-1}, k)$, $k < s_{p-1} < s_{p-2} < \dots < s_1 < j$.

Les 3 autres configurations possibles sont similaires. (cf. Fig. 7, avec $p=3$).

Soit T_1 l'ensemble $T \setminus \{(k, l)\}$. L'arbre $([n] \setminus \{l\}, T_1)$ est non croisé, donc Π_{T_1} possède d'après la preuve de la condition suffisante, un produit \bar{g}_1 égal à la permutation $\zeta_1 = (1, 2, \dots, l-1, l+1, \dots, n)$. Le graphe G_{T_1} introduit dans (a) ci-dessus est ici une simple chaîne, donc la construction donne $\bar{g}_1 = (k, s_{p-1}) \cdot (s_{p-1}, s_{p-2}) \dots (s_1, j) \cdot (j, i)$.

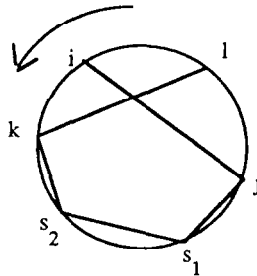


Fig. 7.

Or par hypothèse Π_T contient un produit \bar{g} égal à ζ . Soit \bar{g}' le même produit sans la transposition (k, l) : g' est donc une c -projection de g sur $[n] \setminus \{l\}$ donc $g' = \zeta'$.

D'après le Théorème 3.5, les mots \bar{g}' et \bar{g}_1 sont alors égaux. Donc g a deux valeurs possibles, suivant les positions relatives de (k, l) et (k, s_{p-1}) :

$$(i) (k, l)(k, s_{p-1})(s_{p-1}, s_{p-2}) \dots (s_1, j) \cdot (j, i),$$

$$(ii) (k, s_{p-1}) \cdot (k, l)(s_{p-1}, s_{p-2}) \dots (s_1, j) \cdot (j, i).$$

Il est aisé de vérifier qu'aucune des deux expressions ne donne la permutation circulaire $\zeta = (i, k, s_{p-1}, s_{p-1}, s_{p-2}, \dots, s_1, j)$. \square

Il reste à établir le lemme suivant.

Lemme 3.8. *Si $([n], T)$ est un arbre et si g est une permutation de $[n]$ définie par le produit de transpositions $\bar{g} = \bar{u}(i, k)\bar{v}$ où le sommet k est un sommet pendant, le produit $\bar{g}' = \bar{u}\bar{v}$ définit une permutation g' égale à la c -projection de g sur $[n] \setminus \{k\}$.*

Preuve. Soit j_0 et j_1 les entiers tels que $g(j_0) = k$, et $j_1 = g(k)$. Si $j \neq j_0$, $g'(j) = g(j)$. Si par contre $j = j_0$, nécessairement $v(j_0) = i$, et $u(i) = j_1$, donc $g'(j_0) = g^2(j_0)$. \square

On en déduit immédiatement le corollaire.

Corollaire 3.9. *Si $([n], T)$ est un arbre et g une permutation circulaire définie par un produit des arêtes de T , et si T' est un sous ensemble de T formant un sous-arbre (E, T') , (où $E \subset [n]$), le sous-mot de \bar{g} constitué des arêtes de T' définit une permutation égale à la c -projection de g sur T' .*

La Fig. 8 montre une telle construction avec $n=8$. La colonne centrale exprime les contraintes de succession des transpositions affectant un même point k ($1 \leq k \leq 8$). Elles sont regroupées sur le graphe de droite dont un tri topologique est proposé.

De l'exemple ci-dessus on déduit le mot $\bar{f} = c.b.d.a.g.f.e$, d'où le produit $f = (3, 4)(2, 4)(1, 5)(1, 4)(8, 7)(8, 6)(8, 5)$ qui est bien égal à ζ .

Une autre question reste à résoudre; quel est le nombre de façons distinctes dans le monoïde commutatif ($ab = ba$), d'écrire la permutation circulaire, $\zeta = (1, 2, \dots, n)$, comme un produit de $n-1$ transpositions? Ce problème fut récemment posé et résolu par Eidswick [8].

Soit e_n ce nombre; Eidswick montre que e_n vérifie la récurrence suivante (principe d'inclusion-exclusion),

$$e_2 = 1, \quad e_3 = 3,$$

$$e_n = \sum_{i=1}^{\lfloor 2n/3 \rfloor} (-1)^{i+1} \binom{2(n-i)}{i} e_{n-i} \quad \text{pour } n \geq 4. \quad (12)$$

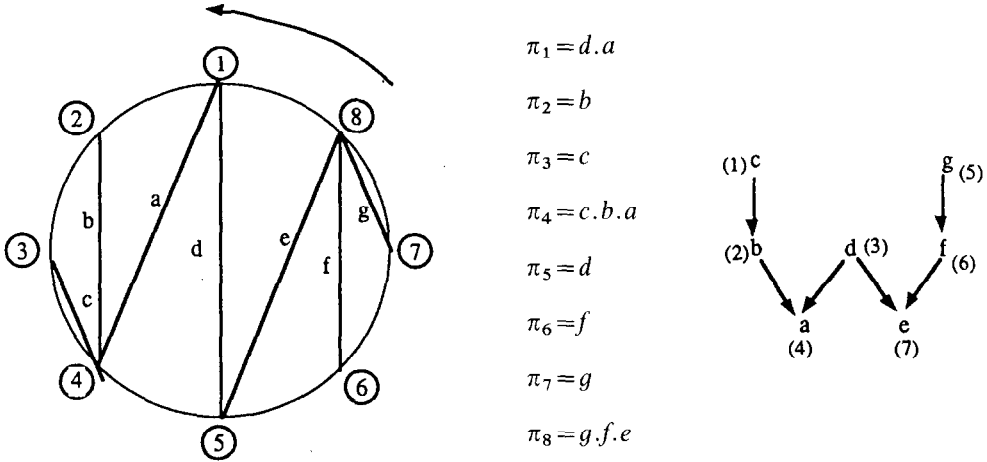


Fig. 8.

Il remarque que

$$(e_n)_{n \geq 2} = 1, 3, 12, 55, 273, 1428, 7752, \dots$$

Il vérifie alors que la suite

$$\frac{1}{2n-1} \binom{3(n-1)}{n-1}$$

satisfait (12) et donc en déduit le théorème suivant.

Théorème 3.10. *Le nombre de façons d'écrire la permutation circulaire $\zeta = (1, 2, \dots, n)$ comme un produit de $n-1$ transpositions est, pour $n \geq 0$,*

$$e_{n+1} = \frac{1}{2n+1} \binom{3n}{n}. \quad (13)$$

Nous en proposons une preuve bijective, fondée sur le Lemme 3.7 et le fait que e_n est le nombre d'arbres non croisés à n sommets sur le cercle $\zeta = (1, 2, \dots, n)$.

Exemple. Pour $n=3$, il y a trois arbres non croisés sur le cercle représentatif de $\zeta = (1, 2, 3)$, donc 3 façons commutativement distinctes d'écrire cette permutation circulaire sous forme de produit de transpositions, comme le montre la Fig. 9.

On a rappelé plus haut dans la preuve du Théorème 2.4 que le nombre e_{n+1} défini par la formule (13) compte les arbres ternaires ayant n sommets internes, $2n+1$ feuilles et donc $3n+1$ sommets en tout. Il suffit alors d'établir la proposition suivante pour achever la preuve bijective du résultat de Eidswick.

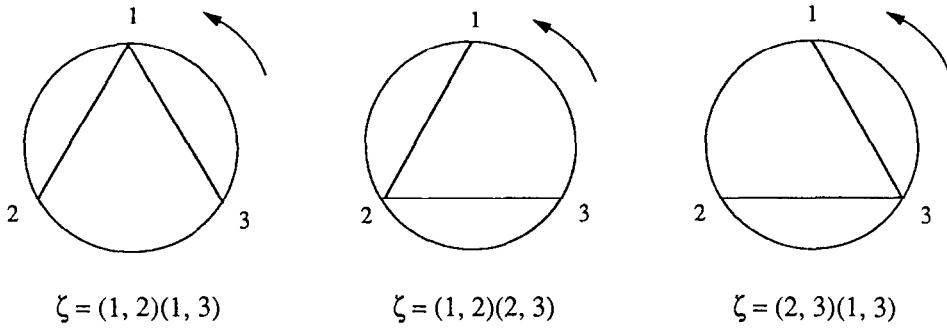


Fig. 9.

Lemme 3.11. *L'ensemble des arbres ternaires à n sommets internes est en bijection avec l'ensemble des arbres non-croisés à n arêtes inscrites sur le cercle $(1, 2, \dots, n+1)$.*

Preuve. Elle se fait par induction. Pour $n=1$ ou 2 , c'est évident en raison des cardinaux. Pour $n > 2$, soit i le plus petit entier ($1 < i \leq n$) relié par une arête de l'arbre planaire à 1 . L'arête $(1, i)$ partage l'arbre planaire donné en trois arbres planaires (à une renumérotation des sommets près), dont la somme des nombres d'arêtes est $n-1$, et cette décomposition est clairement unique, comme la décomposition d'un arbre ternaire à n sommets en trois arbres ternaires ayant en tout $n-1$ sommets. La Fig. 10 illustre cette correspondance. \square

4. Une nouvelle formule de récurrence pour les nombres de Catalan

Les relations de récurrence (12), valables pour les arbres ternaires, suggèrent d'en vérifier d'analogues pour les arbres binaires, qui sont dénombrés par les nombres de

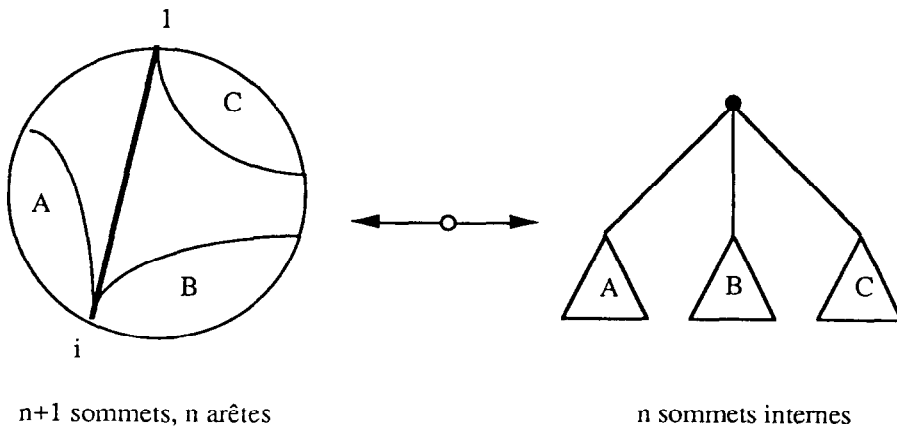


Fig. 10.

Catalan. C'est l'objet de la proposition suivante, dont nous donnerons une preuve bijective.

Proposition 4.1. *Les nombres de Catalan vérifient la relation,*

$$c_0 = 1, \quad (14)$$

$$c_n = \sum_{i=1}^{\lfloor n+1/2 \rfloor} (-1)^{i+1} \binom{n-i+1}{i} c_{n-i}.$$

Preuve. On considère la famille \mathcal{B}_n ($n \geq 1$) des arbres binaires complets ayant $2n+1$ sommets, dont n sommets internes à deux fils, et $n+1$ feuilles. Parmi les sommets internes, on distingue ceux dont les deux fils sont des feuilles, et on les nomme *jeunes pousses*. Elles correspondent exactement aux feuilles de l'arbre binaire quelconque obtenu en enlevant toutes les feuilles de l'arbre binaire complet. Cet arbre binaire possède n sommets et son nombre f de feuilles vérifie la relation $2f-1+n_1=n$, où n_1 est le nombre de sommets ayant un seul fils.

Ainsi, le nombre d de jeunes pousses d'un arbre binaire appartenant à \mathcal{B}_n , égal à f , vérifie

$$1 \leq d \leq \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor. \quad (15)$$

Les sommets internes sont coloriés avec deux couleurs, blanc et noir, de la façon suivante:

- les jeunes pousses peuvent prendre l'une des deux couleurs,
- les autres sommets internes sont tous blancs.

Pour tout arbre T de \mathcal{B}_n , ayant k jeunes pousses noires, on définit une valuation $v(T)$,

$$v(T) = (-1)^k.$$

La Fig. 11 ci-contre montre un arbre binaire T ayant sept sommets internes, et parmi ceux-ci, trois jeunes pousses, dont deux noires et une blanche. Donc $v(T) = 1$.

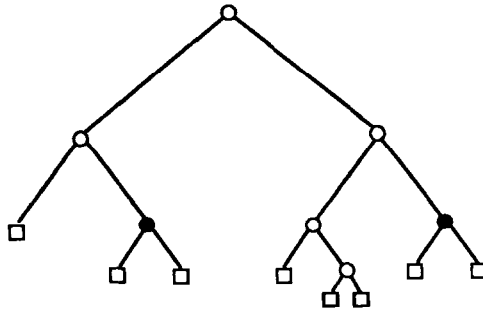


Fig. 11.

Appelons $\hat{\mathcal{B}}_n$ la famille des arbres binaires complets ainsi bicoloriées, et parmi ceux-ci, $\hat{\mathcal{B}}_{n,k}$ la famille de ceux qui ont exactement k jeunes pousses noires. Pour $n \geq 1$, il existe une involution sans point fixe qui échange deux arbres de $\hat{\mathcal{B}}_n$ en changeant la parité du nombre de jeunes pousses noires, donc le signe de la valuation; en effet, pour $n \geq 1$, il existe toujours au moins une jeune pousse d'après (15), il suffit alors de changer la couleur de la première jeune pousse dans l'ordre préfixe. On en déduit,

$$\sum_{T \in \hat{\mathcal{B}}_n} v(T) = 0. \quad (16)$$

D'autre part, (16) peut s'écrire,

$$0 = \sum_{k \geq 0} (-1)^k \sum_{T \in \hat{\mathcal{B}}_{n,k}} 1 = \sum_{k \geq 0} (-1)^k |\hat{\mathcal{B}}_{n,k}|. \quad (17)$$

Enfin, si l'on coupe les deux fils des k jeunes pousses noires, celles-ci deviennent k feuilles noires. L'arbre obtenu est un arbre binaire complet n'ayant plus que $n - k$ sommets internes, et donc $n - k + 1$ feuilles bicoloriées; parmi celles-ci k sont noires. Cette correspondance est clairement bijective.

La Fig. 12 illustre cette correspondance.

On en déduit que,

$$|\hat{\mathcal{B}}_{n,k}| = \binom{n-k+1}{k} c_{n-k}. \quad (18)$$

En portant cette valeur dans (17) et en extrayant de la somme le terme pour $k=0$, on obtient les relations (14). \square

Généralisation aux arbres p -aires

Ce résultat s'étend immédiatement aux arbres p -aires. Rappelons (cf. [13]) qu'un arbre p -aire est tel qu'un sommet n 'a aucun fils (feuille), ou bien a exactement p fils, et les fils d'un même père sont totalement ordonnés. Si n est le nombre de sommets internes, il y a $(p-1)n + 1$ feuilles donc $pn + 1$ sommets en tout.

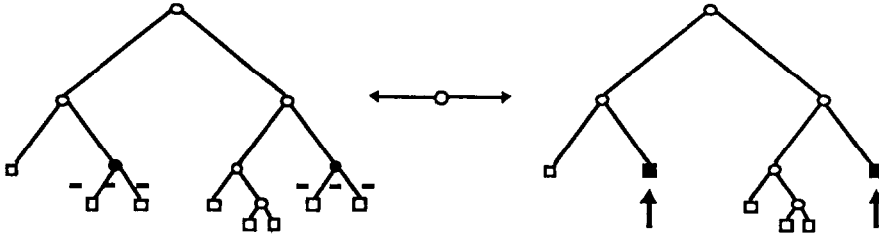


Fig. 12.

Le nombre d'arbres p -aires ayant n sommets internes est classique (cf. [12, 13]). C'est,

$$b_n = \frac{1}{(p-1)n+1} \binom{pn}{n}. \quad (19)$$

On a alors le théorème suivant.

Théorème 4.2. *Le nombre b_n d'arbres p -aires vérifie la relation de récurrence,*

$$\begin{aligned} b_0 &= 1, \\ b_n &= \sum_{k=1}^{\lfloor ((p-1)n+1)/p \rfloor} (-1)^{k+1} \binom{(p-1)(n-k)+1}{k} b_{n-k}. \end{aligned} \quad (20)$$

Preuve. C'est la pure généralisation de la preuve précédente. On appelle maintenant *pousse* tout sommet interne dont les p fils sont des feuilles. On colorie les pousses de deux couleurs, noir et blanc, les autres sommets internes étant coloriés blancs. Soit $\hat{\mathcal{P}}_n$ la famille des arbres p -aires à n sommets internes ainsi bicoloriés, et $\hat{\mathcal{P}}_{n,k}$ la famille parmi ceux-ci qui ont k pousses noires.

On définit encore, pour tout arbre T de $\hat{\mathcal{P}}_n$, sa valuation par $v(T) = (-1)^k$. Le même raisonnement que dans le cas binaire conduit à, pour $n \geq 1$,

$$\sum_{T \in \hat{\mathcal{P}}_n} v(T) = 0, \quad (21)$$

d'où,

$$0 = \sum_{k \geq 0} (-1)^k \sum_{T \in \hat{\mathcal{P}}_{n,k}} 1 = \sum_{k \geq 0} (-1)^k |\hat{\mathcal{P}}_{n,k}|. \quad (22)$$

Par suppression de tous les fils des pousses noires, on établit une bijection entre $\hat{\mathcal{P}}_{n,k}$ et la famille des arbres p -aires dont les feuilles sont bicolorées, ayant k feuilles noires. Ces arbres ont alors $n-k$ sommets internes, donc $(p-1)(n-k)+1$ feuilles au total, nombre que k ne peut excéder, soit

$$0 \leq k \leq \left\lfloor \frac{(p-1)n+1}{p} \right\rfloor.$$

En reportant dans (22), il vient,

$$0 = \sum_{k=0}^{\lfloor ((p-1)n+1)/p \rfloor} (-1)^k \binom{(p-1)(n-k)+1}{k} b_{n-k}. \quad (23)$$

D'où les relations (20) en sortant de la somme précédente le terme pour $k=0$. \square

Bibliographie

- [1] A. Arnold, M.P. Delest and S. Dulucq, Complexité moyenne de l'algorithme d'exclusion mutuelle de Naïmi-Trehel, Proc. Actes du 57^{ième} congrès de l'ACFAS, S. Brlek, ed., UQAM, Montréal (1990) 111-128.

- [2] C. Berge, *Principes de Combinatoire* (Dunod, Paris, 1968).
- [3] W.G. Brown, Historical note on a recurrent combinatorial problem, *Amer. Math. Monthly* 72 (1965) 973–977.
- [4] J. Dénes, The representation of a permutation as the product of a minimal number of transpositions, and its connection with the theory of graphs, *A Magyar Tudományos Akadémia Matematikai Kutató Intézetének Közleményei* 4 (1959) 63–70.
- [5] R. Donaghey and L.W. Shapiro, Motzkin numbers, *J. Combin. Theory Ser. A* 23 (1977) 291–301.
- [6] S. Dulucq, *Etude combinatoire de problèmes d'énumération, d'algorithmique sur les arbres et de codage par des mots*, Thèse d'état, Bordeaux, 1987.
- [7] M. Eden and M.P. Schützenberger, Remark on a theorem of Dénes, *A Magyar Tudományos Akadémia Matematikai Kutató Intézetének Közleményei* 7 (1962) 353–355.
- [8] J.A. Eidswick, Short factorizations of permutations into transpositions, *Discrete Math.* 73 (1989) 239–243.
- [9] A. Errera, Un problème d'énumération, *Mém. Acad. Royale Belgique*, 8°, 2, Vol. 11, 1931.
- [10] J.C. Fournier, Graphes de cordes, hypergraphes de chaînes d'un arbre et matroïdes graphiques, *Actes du Colloque Algèbre appliquée et Combinatoire*, C. Benzaken, ed. (Grenoble, Juin, 1978) 164–171.
- [11] H.W. Gould, Research bibliography of two special number sequences, *Math. Monographiae* 12 (1971).
- [12] D.A. Klarner, Correspondences between plane trees and binary sequences, *J. Combin. Theory* 9 (1970) 401–411.
- [13] D.E. Knuth, *The Art of Computer Programming*, Vol. 1: Fundamental Algorithms (Addison Wesley, Reading, MA, 1973).
- [14] E. Lucas, *Théorie des Nombres*, Vol. 1 (Gauthier-Villars, Paris, 1891).
- [15] T. Motzkin, Relations between hypersurface cross ratios, and a combinatorial formula for partitions of a polygon, for permanent preponderance, and for non-associative products, *Bull. Amer. Math. Soc.* 54 (1948) 352–360.
- [16] P. Moszkowski, A solution to a problem of Dénes: a bijection between trees and factorizations of cyclic permutations, à paraître dans, *European. J. Combin.*
- [17] A. Nijenhuis and H.S. Wilf, The enumeration of connected graphs and linked diagrams, *J. Combin. Theory Ser. A* 27 (1979) 355–359.
- [18] R.C. Read, The chord intersection problem, *Proc. 2nd Internat. Conf. on Combinatorial Mathematics*, Vol. 319 (Ann. New York Acad. Sci., New York, 1979), 444–454.
- [19] J. Riordan, The distribution of crossings of chords joining pairs of $2n$ points on a circle, *Math. of Comput.* 29 (1975) 215–222.
- [20] F. Ruskey, Generating t -ary trees lexicographically, *Siam. J. Comput.* 7 (1978) 424–439.
- [21] P.R. Stein, On a class of linked Diagram, I. Enumeration, *J. Combin. Theory Ser. A* 24 (1978) 357–398.
- [22] J. Touchard, Sur un problème de configurations, *C.R. Acad. Sci. Paris* 230 (1950) 1997–1998.
- [23] J. Touchard, Contributions à l'étude du problème des timbres poste, *Canad. J. Math.* 2 (1950) 385–398.
- [24] J. Touchard, Sur un problème de configurations et sur les fractions continues, *Canad. J. Math.* 4 (1952) 2–25.
- [25] M. Trehel et Naïmi, Un algorithme distribué d'exclusion mutuelle en $\log(n)$, *Technique et Science Informatiques* 6 (1987) 141–150.